ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1983

****

P'

MATHEMATIQUES II
(2 pages dactylographiées)

N.B.1. La question I.1. gouverne toute la suite ; en revanche les questions I.2, II et III sont indépendantes.

N.B.2. On fera des conventions telles que toutes les courbures qui interviennent soient positives.

Dans tout le problème, on se donne un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, et un repère orthonormal direct fixe $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$.

PREMIERE PARTIE

Le temps t décrivant $\mathbb{R}$, on étudie le mouvement ponctuel (dans $\mathcal{E}$) $t \mapsto M(t)$ défini par : $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{u}(t) + \vec{k}\,ch\,t$

où $\vec{u}(t) = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t$. On note $\vec{v}(t) = -\vec{i}\sin t + \vec{j}\cos t$.

Soit Γ la trajectoire de M, orientée dans le sens des t croissants, avec M (0) pour origine des abscisses curvilignes.

1.1 a) Déterminer l'abscisse curviligne s (t), le repère de Frenet $\mathcal{F}(t) = (M(t) ; \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$, la courbure c (t) de Γ au point de paramètre t.
A titre de vérification montrer : $\vec{B} - \vec{N} = \vec{v}\sqrt{2}$.

b) Montrer : $\overrightarrow{OM}.\vec{N} = 0$ et $\overrightarrow{OM}.\vec{T} = s$.

1.2. Soient P le centre de courbure de Γ en M défini par $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{c}\vec{N}$, et P' la projection orthogonale de P sur le plan repéré par $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Donner les coordonnées cartésiennes de P (t) dans le repère $(O; \vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{k})$.
En se limitant à $t \geqslant 0$, ce qu' autorise une symétrie que l'on précisera, montrer que P' (t) admet, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un unique système de coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$ tel que r et θ soient des fonctions continues vérifiant $r \geqslant 0$ et $\theta(0) = 0$.
Expliciter ces fonctions ainsi que leurs dérivées (on fera intervenir $\varphi = \text{Arc tg}\,\frac{ch\,t\,sh\,t}{sh^2 t - 1}$ et $\lambda = sh^2 t$) ; donner des valeurs numériques approchées des valeurs prises par t, r et θ lorsque $\frac{dr}{dt}$ ou $\frac{d\theta}{dt}$ prend la valeur 0.

Construire avec soin la trajectoire de P' lorsque t parcourt [0, Arg sh2] ; on précisera la tangente au point P' (0).

DEUXIEME PARTIE

Les notations étant celles de la première partie, on désigne par H (t) la projection orthogonale de O sur la tangente à Γ en M (t), et par C la trajectoire de H, que l'on oriente dans le sens des t croissants, avec H (0) pour origine des abscisses curvilignes.

.../...

2.1. Vérifier : $\overrightarrow{MH} = -s\,\vec{T}$

Vérifier qu'il existe une constante a (que l'on précisera) telle que, avec les notations de la partie I : $\overrightarrow{OH} = a\,\vec{B}$.

Déterminer l'abscisse curviligne $s_1(t)$, le repère de Frenet $(H(t) ; \vec{T}_1(t), \vec{N}_1(t), \vec{B}_1(t$ la courbure $c_1(t)$ de C au point de paramétre $t \neq 0$. (On notera $|t| = \varepsilon t$).

Montrer que H (O) est un point de rebroussement de C et préciser la demi-tangente de rebroussement.

2.2. Montrer que le centre de courbure W (t) de C en H (t), défini par $\overrightarrow{H(t)\,W(t)} = \frac{1}{c_1(t)}\,\vec{N}_1(t)$ est la projection orthogonale de H (t) sur la droite qui contient O et M (t). Vérifier $\overrightarrow{OW} = \frac{a^2}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\,\overrightarrow{OM}$

2.3. Construire sur une même figure les trajectoires des projections orthogonales H' et W' de H et W sur le plan repéré par $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; ici encore on se limitera à $t \geq 0$; on précisera les points H' (O) et W' (O) ainsi que les tangentes en ces points ; on donnera des valeurs approchées des coordonnées dans le repère $(O ; \vec{u}(t), \vec{v}(t))$ de H' (t) et de W' (t) successivement pour $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \pi$.

TROISIEME PARTIE

On reprend le mouvement ponctuel $t \mapsto M(t)$ étudié dans la première partie dont on conserve les notations (t décrit $\mathbb{R}$ tout entier).

3.1. Le repère $\mathcal{F}(t)$ de $\mathcal{E}$ est la position à l'instant t d'un repère orthonormal direct $\mathcal{F} : \{ M ; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B} \}$ d'un solide Σ en mouvement par rapport à $\mathcal{E}$.

Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(t)$, l'axe $\Delta(t)$ et le vecteur glissement $\vec{J}(t)$, à l'instant t dans le mouvement $\Sigma/\mathcal{E}$. On déterminera les coordonnées dans le repère $\mathcal{F}(t)$ de $\vec{\Omega}(t)$, de $\vec{J}(t)$ et de la projection orthogonale Q (t) de M(t) sur $\Delta(t)$.

Vérifier : $$\vec{\Omega}(t) = \frac{1}{ch\,t}\,\overrightarrow{OM}(t).$$

3.2. On désigne par Δ_t la droite liée à Σ qui occupe à l'instant t la position $\Delta(t$ dans $\mathcal{E}$. Quand t décrit $\mathbb{R}$, Δ_t engendre une nappe réglée $\mathcal{S}$ dont on donnera une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{F}$ de Σ.

Montrer $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de Σ qui admet, dans $\mathcal{F}$, une équation $f(X, Y, Z) = 0$, dans laquelle f est un polynôme de degré 3 : préciser $\mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$.

Montrer qu'il existe un repère $\mathcal{F}'$ de Σ dans lequel $\mathcal{S}'$ admet une équation de la forme : $Y'(X'^2 + Z'^2) = \lambda(X'^2 - Z'^2)$.

****
**
*